Série n° 12 de Sciences Physiques
Physique : Dipôle RLC forcée (Math)

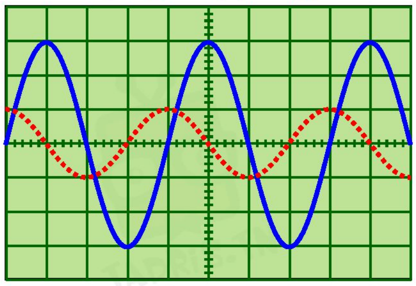
Rappels :

- Le GBF **impose une tension sinusoïdale**

$$u(t) = U_m.\sin(\omega t + \varphi_u) = U_m.\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_u\right) = U_m.\sin(2\pi Nt + \varphi_u)$$

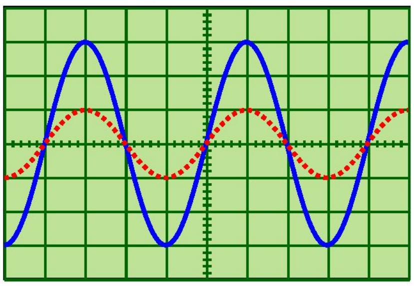
- **i(t)** varie sinusoïdalement en fonction du temps avec une fréquence **N égale à la fréquence de la tension excitatrice u(t)** donc $i(t) = I_m.\sin(2\pi Nt + \varphi_i)$.
- **La réponse d'un circuit RLC à une tension alternative sinusoïdale de fréquence N est un courant alternative sinusoïdale de même fréquence N**.
- Le **GBF** joue le rôle de **l'excitateur** et **l'oscillateur RLC** joue le rôle du **résonateur**.
- $\frac{U_m}{I_m}$ est une **constante** qui ne dépend que des caractéristiques de l'oscillateur. On l'appelle **impédance du circuit** et on la note **Z** : $Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$. Les impédances s'expriment en **ohm** (**Ω**).
- La fréquence propre **N_0** du circuit RLC série est : $N_0 = \frac{1}{2\pi.\sqrt{L.C}}$.
- Lorsque N augmente en restant inferieur N_0, I_m augmente. Pour $N=N_0$, I_m est maximale et lorsque N augmente en étant supérieur à N_0, I_m diminue.
- **La fréquence du résonateur est égale à la fréquence du GBF : Nr = N**. Les oscillations étant imposé par le GBF, elles ne sont plus **libres** : elles sont **forcées**.
-

$N<N_0$, $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$



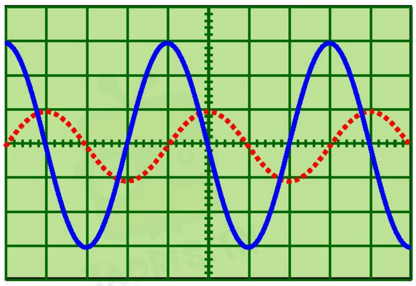
i(t) est en **avance** de phase % à u(t)

$N=N_0$, $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$



i(t) et u(t) sont en **phase**

$N>N_0$, $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0$

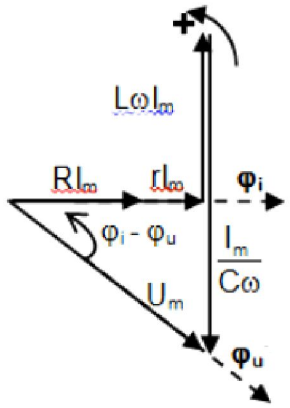
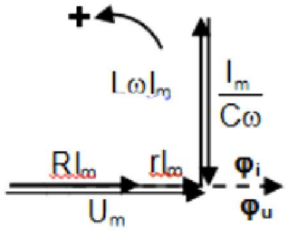
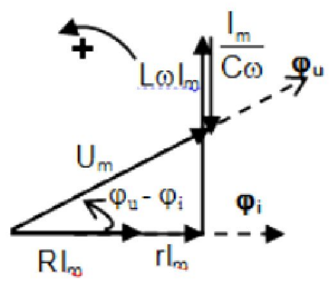


i(t) est en **retard** de phase % à u(t)

- **$u_B(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $u_G(t)$ quel que soit la fréquence N.**
- **$u_C(t)$ est toujours en retard de phase par rapport à $u_G(t)$ quel que soit la fréquence N.**
- **$u_R(t)$ est toujours en retard de phase par rapport à $u_B(t)$ quel que soit la fréquence N.**
- **La résonance d'intensité** est l'état d'un oscillateur en oscillation forcée lorsqu'il oscille avec une **amplitude I_m maximal**. **La résonance d'intensité** est toujours observée lorsque **$N = N_0$.**
- **Si $R=R_0+r$ est très faible**, le maximum est très **élevé** : On dit que la **résonance est aigue**.
- **Si $R=R_0+r$ est grande**, le maximum est **faible** : On dit que la **résonance est floue**.

- **Equation différentielle :** $L.\frac{d^2q}{dt^2} + R.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}.q = u$ **ou** $L.\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}.\int i.dt = u$

- **Résolution par la méthode de Fresnel pour l'intensité :**
  - ✓ $R.I_m.\sin(\omega t+\varphi_i) \mapsto \overrightarrow{OA_1}\,[R.I_m \;,\; \varphi_i]$
  - ✓ $L.\omega.I_m.\sin\left(\omega t+\varphi_i+\frac{\pi}{2}\right) \mapsto \overrightarrow{OA_2}\left[L.\omega.I_m \;,\; \varphi_i+\frac{\pi}{2}\right]$
  - ✓ $\frac{1}{C}.\frac{I_m}{\omega}.\sin\left(\omega t+\varphi_i-\frac{\pi}{2}\right) \mapsto \overrightarrow{OA_3}\left[\frac{I_m}{C.\omega} \;,\; \varphi_i-\frac{\pi}{2}\right]$
  - ✓ $U_m.\sin(\omega t+\varphi_u) \mapsto \overrightarrow{OA}\,[U_m \;,\; \varphi_u]$
- **Trois cas :**
  - ✓ $N > N_0 \Leftrightarrow \Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_i>0$ **i(t)** est en **retard** de phase par rapport à **u(t)** dans ce cas le circuit RLC est dit **inductif**.
  - ✓ $N < N_0 \Leftrightarrow \Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_i<0$ **i(t)** est en **avance** de phase par rapport à **u(t)** dans ce cas le circuit RLC est dit **capacitif.**
  - ✓ $N = N_0 \Leftrightarrow \Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_i=0$ **i(t)** et **u(t)** sont en **phase**. Le circuit RLC est dit **résistif.**

Trois cas sont possibles :		
$L\omega I_m < \frac{I_m}{C\omega} \Longleftrightarrow \omega<\omega_0$ Circuit capacitif	$L\omega I_m = \frac{I_m}{C\omega} \Longleftrightarrow \omega=\omega_0$ Circuit résistif	$L\omega I_m > \frac{I_m}{C\omega} \Longleftrightarrow \omega>\omega_0$ Circuit inductif
		
$\boxed{\varphi_u < \varphi_i}$ u(t) est en retard de phase par rapport à u_R(t) (càd à i(t)).	$\boxed{\varphi_u = \varphi_i}$ u(t) et u_R(t) sont en phase avec (de même pour u(t) et i(t)).	$\boxed{\varphi_u > \varphi_i}$ u(t) est en avance de phase par rapport à u_R(t) (càd à i(t)).

✓ $I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2+\left(L.\omega-\frac{1}{C.\omega}\right)^2}}\;;\; Z=\frac{U_m}{I_m};\; Z=\sqrt{R^2+\left(L.\omega-\frac{1}{C.\omega}\right)^2}\;;$

$$tg|\Delta\varphi| = \frac{\left|L.\omega-\frac{1}{C.\omega}\right|}{R}\;;\quad \cos\Delta\varphi = \frac{R.I_m}{U_m}=\frac{R}{\frac{U_m}{I_m}}=\frac{R}{Z}$$

✓ **I_m** prend sa valeur la plus élevée quand **Z** prend une valeur minimale c.à.d. : $L.\omega=\frac{1}{C.\omega}$ obtenu pour $\omega=\omega_0 \Leftrightarrow N=N_0$ **: Le circuit est purement résistif.**

✓ L'impédance Z est minimale : Z=R. Par conséquent, l'intensité maximale prend sa valeur la plus élevée $I_{m,0}=\frac{U_m}{R}$ **: C'est la résonance d'intensité.**

✓ $\mathbf{tg|\Delta\varphi| = \frac{\left|L.\omega - \frac{1}{C.\omega}\right|}{R} = 0 \Leftrightarrow |\Delta\varphi| = 0}$, ce qui signifie qu'à la **résonance**, la tension **u(t)** et l'intensité **i(t)** sont **en phase**.

$\mathbf{N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$ **: Résonance d'intensité** $\Leftrightarrow \begin{cases} I_m \text{ est la plus élevée} \\ u(t) \text{ et } i(t) \text{ sont en phase.} \end{cases}$

- **Facteur de surtension :** $Q = \frac{1}{R.C\omega_0} = \frac{L.\omega_0}{R} = \frac{1}{R_0+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$
- **Puissance moyenne :** $P = \frac{U_m I_m}{2} cos\Delta\varphi = U.Icos\Delta\varphi = R.I^2$

Exercice n°1

Un générateur G.B.F impose une tension sinusoïdale $u(t) = 5\sqrt{2}\sin(2\pi Nt)$ d'amplitude constante aux bornes d'un dipôle D comportant en série : un condensateur de capacité $C = 5\mu F$, une bobine d'inductance L et de résistance interne r et un résistor de résistance R. On branche deux voltmètres respectivement aux bornes de l'ensemble (bobine- résistor) et aux bornes du condensateur. Pour une fréquence $N_1 = 100Hz$ du G.B.F. l'intensité du courant électrique dans le circuit est $i(t) = I_m \sin(200\pi t + \varphi_i)$, les deux voltmètres indiquent les valeurs suivantes : $U_{BR} = 5\sqrt{5}$ V; $U_C = 10$ V.

1- Justifier que le dipôle D est un oscillateur électrique forcé.

2- Etablir l'équation différentielle relative à $i(t)$.

3- Calculer la valeur de l'intensité efficace I du courant électrique et la valeur de l'impédance Z du circuit.

4- Déterminer la nature du circuit.

5- Déterminer la valeur de l'inductance L de la bobine.

6- Pour une fréquence N_2 du G.B.F la visualisation à l'oscilloscope montre que la tension $u(t)$ est en avance de phase de $\frac{3\pi}{4}$ rad par rapport à $u_C(t)$.

a- Représenter le circuit et indiquer les branchements nécessaires à un oscilloscope qui permettent de visualiser $u(t)$ et $u_C(t)$.

b- Déterminer la phase φ_i.

c- Déterminer la valeur de la fréquence N_2.

d- La mesure de la tension aux bornes de l'ensemble $\{Bobine - Condensateur\}$ donne $U_{BC} = 3,75$ V.

d₁- Faire la construction de Fresnel à l'échelle 2 cm → $\sqrt{2}$ V. Axe des phases horizontal.

d₂- Déduire les valeurs approximatives de R et r.

Exercice n°2

On considère un circuit série formé par un GBF, un résistor de résistance R, un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L et de résistance r.

Le GBF délivre une tension d'amplitude U_m constante, de fréquence N réglable et de valeur instantanée $u(t) = U_m.\sin(2\pi Nt)$.

I/ Un oscilloscope permet de visualiser simultanément les tensions $u_R(t)$ et $u_C(t)$ aux bornes respectivement du résistor et du condensateur.

1- Représenter le circuit électrique et faire les connexions à l'oscilloscope permettant de voir $u_R(t)$ et $u_C(t)$ respectivement sur ses voies Y_1 et Y_2.

2- Ecrire l'équation différentielle régissant les variations de l'intensité du courant électrique dans le circuit.

La solution de cette équation est de la forme : $i(t) = I_m.\sin(2\pi Nt + \varphi_i)$.

3- a- Reproduire et compléter le tableau suivant

Tension électrique	**Expression de l'amplitude**	**Phase initiale**
$(R+r)i$		φ_i
$L.\dfrac{di}{dt}$		
$\dfrac{1}{C}.\int idt$		
$u(t)$		

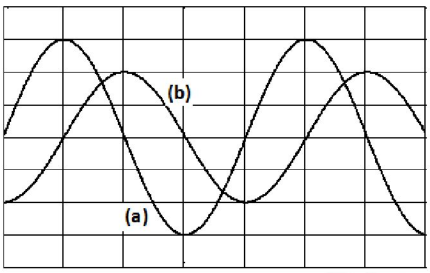
b- Faire, sans souci d'échelle, la représentation de Fresnel relative aux tensions maximales dans le cas où le circuit est inductif.

c- Exprimer l'expression de l'intensité maximal I_m en fonction de U_m, L, N, C, R et r.

d- Déduire l'expression l'impédance du résonateur Z. En déduire son expression Z_0 à la résonance d'intensité.

II/ Pour une fréquence N_1 de N et sur l'écran de l'oscilloscope, il apparait les oscillogrammes de la figure (1).

Figure 1



Réglage de l'oscilloscope :
- Balayage vertical : Voie Y_1 : 2 V/div
  Voie Y_2 : 5,4 V/div
- Balayage horizontal : $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ ms/div

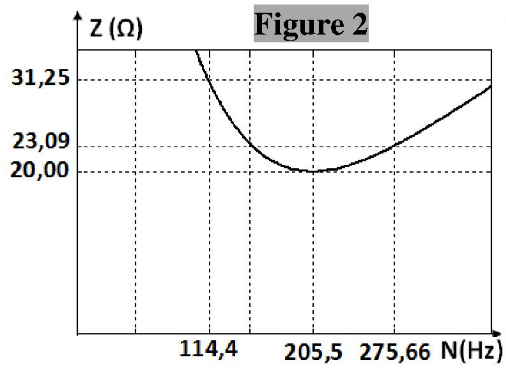
1- Laquelle des deux courbes (a) et (b) est celle qui correspond à $u_R(t)$? Justifier la réponse.

2- En se servant des courbes de la figure (4), déterminer la fréquence N_1 du GBF et les tensions maximales U_{Rm} et U_{Cm} respectivement des tensions $u_R(t)$ et $u_C(t)$.

3- La courbe de la figure (2), représente les variations de l'impédance Z en fonction de la fréquence N du GBF.

a- Déterminer graphiquement la valeur de Z_0 et celle de la fréquence propre N_0 du résonateur.

Figure 2



b- Pour la fréquence N_1 :

- Donner la valeur de l'impédance Z_1 du résonateur.

- Préciser la nature inductive, capacitive ou résistive du circuit.

- Montrer que $\varphi_i = -\frac{\pi}{6}$.

4- Montrer que L =0,015 H et déduire la valeur de C.

5- a- Déterminer pour la fréquence N_1 l'intensité maximale I_m du courant et en déduire les valeurs de R, de r et de U_m.

b- Calculer la puissance moyenne électrique consommée par le résonateur pour la fréquence N_1.